***עבודת בית 1: תכנון אלגוריתמים 2021***

**תאריך הגשה:** את העבודה יש להגיש במערכת ההגשה (עדיף מוקלד).

\* מומלץ ביותר ***לא להמתין לרגע האחרון*** להגשת העבודה.

**מתרגל אחראי:** גיא סער.

**הוראות כלליות:**

* כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:

1. תיאור מילולי של האלגוריתם.

2. הוכחת נכונות.

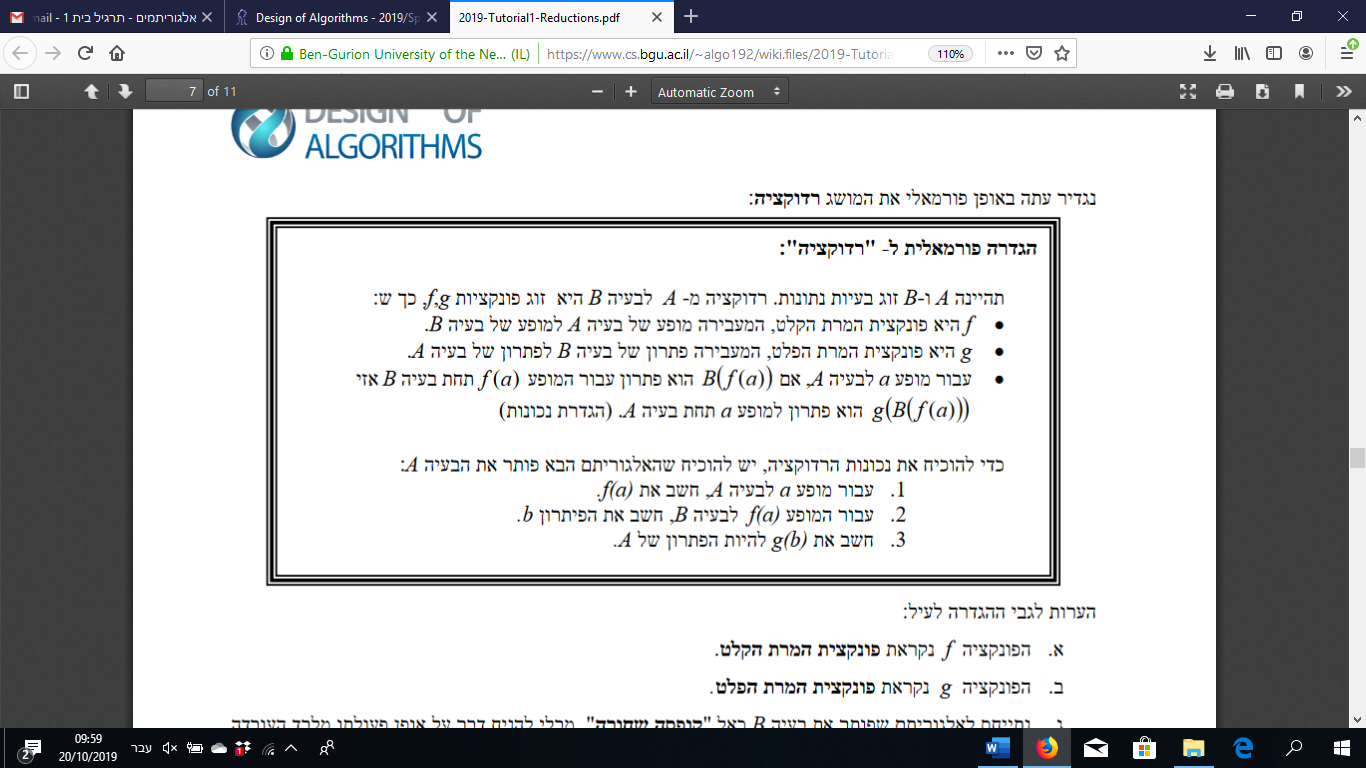
3. ניתוח זמן ריצה (**לא כולל** זמן הריצה של הקופסה השחורה).

* אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
* פתרון יש לכתוב רק בדף התשובות הנלווה לעבודה.

הערה כללית: אין בהכרח קשר בין סעיפים של אותה השאלה.

**תזכורת**:

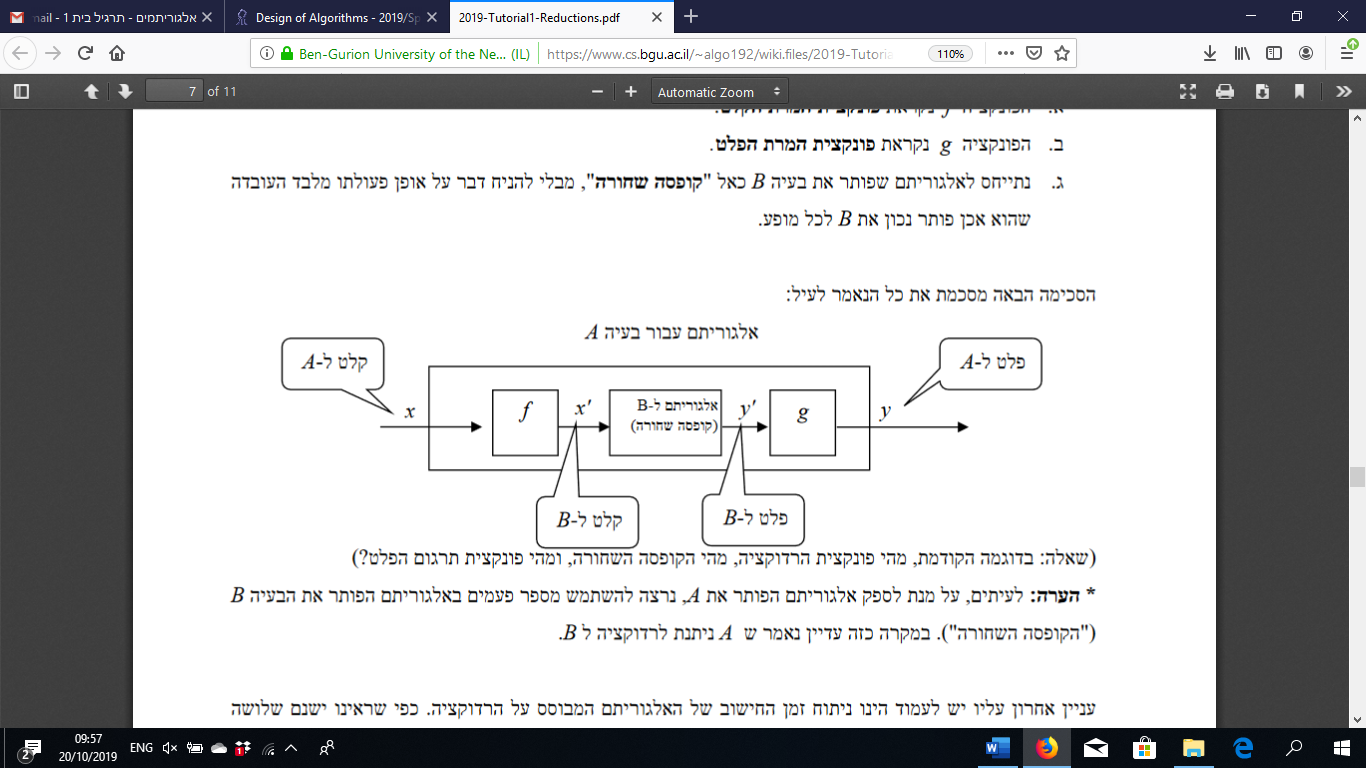
רדוקציה הינה פתרון בעיה אחת בעזרת בעיה אחרת. באופן פורמלי (מהתרגול):



כאשר הינה תרגום הקלט, הינה תרגום הפלט והאלגוריתם לבעיה הינו ה"קופסא השחורה".

לטובת העבודה, כשאנו מבקשים רדוקציה מבעיה לבעיה , יש לתת פתרון לבעיה באמצעות קופסא שחורה של בעיה .

**הערה:** ניתן להניח כי ממיר הפלט מכיר גם את הקלט המקורי .



**שאלה 1 (20 נקודות)**

|  |
| --- |
| ממיר הקלט: לוקח גרף מכוון וסדרה של קודקודים שונים () כך ש- כך שאין צלע בין |
| s ל t. מחזיר גרף מכוון וזוג קוד' . המוגדרים כך: |
| **- אם** **אז** |
| **- אחרת, נייצר קדקוד**  **ונגדיר-** **ו-** |
|  |
| **ממיר הפלט: מחזיר את הפלט שהוחזר מהאלגוריתם.** |
| **האלגוריתם: א) הרץ את ממיר הקלט, כלומר בהינתן**  **קבל** . |
| **ב) מצא אורך מסלול קצר ביותר מ- ל- ב- .** |
| **ג) החזר את אורך המסלול הנ"ל אם קיים או החזר אם לא קיים.** |
| **טענה עיקרית:** אורך המסלול הקצר ביותר מ- ל- ב שווה ל**אורך המסלול** הקצר ביותר מ- ל- ב מכל |
| המסלולים ש- אינו הקודקוד השני בהם. |
| טענת עזר 1: לכל מסלול מ- ל- ב- תחת ההנחה ש- אינו הקודקוד השני במסלול קיים מסלול מ- ל- |
| ב בעל אותו אורך. |
| טענת עזר 2: לכל מסלול מ- ל- ב- , קיים מסלול מ- ל- ב בעל אורך זהה כך ש- אינו הקודקוד השני |
| שלו. |
| **הוכחת הטענה העיקרית בהינתן טענת עזר 1 ו-2:** |
| **מקרה 1: לא קיים מסלול** מ- ל- ב- **העומד בדרישות.** |
| **נניח בשלילה כי קיים מסלול** מ- ל- ב- , לכן מטענת עזר 2 קיים מסלול מ- ל- ב בעל אורך זהה כך ש- |
| אינו הקודקוד השני וזו סתירה להנחה. ולכן לא קיים מסלול ב וה"קופסא השחורה" תחזיר כפלט ∞ ומהגדרת ממיר הפלט |
| הפלט יהיה ∞ כנדרש. |
| **מקרה 2: קיים מסלול** מ- ל- ב- **העומד בדרישות.** |
| **יהי מסלול מינימאלי** מ- ל- ב- **העומד בדרישות. נסמן** |
| **לכן מטענה 1** קיים מסלול מ- ל- ב בעל אורך זהה, כלומר |
| נניח בשלילה ש- אינו מינימאלי ב, ולכן קיים מסלול מ- ל- ב ולכן |
| מטענת עזר 2 קיים מסלול A מ- ל- ב- בעל אורך זהה ל ולכן |
| וזו סתירה להנחה למינימאליות של מסלול . |
| **הוכחת טענת עזר 1:** |
| **יהי** מסלול מ- ל- ב- תחת ההנחה ש- אינו הקודקוד השני במסלול. |
| **מקרה 1:** |
| **לכן** **מהגדרת** ממיר הקלט **ולכן**  **הוא גם המסלול** מ- ל- ב. ובוודאי שהוא בעל אותו אורך. |
| מקרה 2: |
| **נסמן .** נשים לב מהגדרת ממיר הקלט: |
|  |
| כי עבור כל מתקיים: (. כי עבור כל מתקיים: ( |
| כי עבור כל מתקיים: ( ולכן קיים מסלול ב בעל אותו אורך כ. |
| **הוכחת טענת עזר 2:** |
| **יהי** מסלול מ- ל- ב- . **מהגדרת** ממיר הקלט ולכן |
| **מקרה 1:** |
| **לכן** **מהגדרת** ממיר הקלט **ולכן**  **הוא גם המסלול** מ- ל- ב. ובוודאי שהוא בעל אותו אורך. |
| **מקרה 2:** |
| **נשים לב מהגדרת ממיר הקלט**: |
| כי עבור כל מתקיים: (. כי עבור כל מתקיים: ( |
| כי עבור כל מתקיים: ( ולכן קיים מסלול ב בעל אותו אורך כ, כך ש- אינו הקודקוד |
| השני במסלול. |
| **סיבוכיות זמן ריצה:** |
| **- ממיר הקלט: יצירת קודקוד , חסום ע"י** |
| **חיבור כל קשתות קודקוד לקודקוד , חסום ע"י מספר הקשתות, כלומר מספר הקודקודים בגרף** |
| - כפי שנתון בשאלה, זמן ריצת הקופסה השחורה הינו . |
| **- ממיר הפלט: מחזיר באופן ישיר את תוצאות האלגוריתם, חסום ע"י** . |
| **לכן זמן הריצה הכולל, הוא של** |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**שאלה 2 (15 נקודות)**

|  |
| --- |
| ממיר הקלט: לוקח גרף לא מכוון עם פונקציית משקל וקודקוד מקור . |
| מחזיר גרף לא מכוון עם קודקוד מקור ופונקציית משקל המבצעת המרה באופן הבא: |
|  |
| **ממיר הפלט: מחזיר את הפלט שהוחזר מהאלגוריתם.** |
| **האלגוריתם: א) הרץ את ממיר הקלט בהינתן וקבל .** |
| **ב) עבור כל מצא האם קיים מסלול עם צוואר בקבוק 1 מ**s **ל**v**.** |
| **ג) החזר את התוצאה.** |
| **טענה עיקרית: קיים מסלול עם** צוואר בקבוק 1 עם משקלים בינריים, עם פונקציית משקל אם"ם קיים מסלול עם |
| צוואר בקבוק לפחות k עם משקלים אי שליליים, עם פונקציית משקל w. |
| **הוכחת הטענה העיקרית:** |
| **1) נניח כי** קיים מסלול ב עם צוואר בקבוק לפחות k עם משקלים אי שליליים, עם פונקציית משקל w וקודקוד מקור . |
| **אז לכל** , **ולכן** **ולכן הצוואר בקבוק של מסלול עם פונקציית משקל וקודקוד מקור** |
| **הוא 1.** |
| **2) נניח כי** קיים מסלול ב עם צוואר בקבוק 1 עם משקלים בינריים, עם פונקציית משקל וקודקוד מקור . |
| **אז לכל** , **ולכן** **ולכן הצוואר בקבוק של מסלול עם פונקציית משקל וקודקוד מקור** |
| **הוא לפחות .** |
| **ניתוח זמן ריצה:** |
| **המרת הקלט: יצירת פונקציית המשקלים דורשת מעבר על כלל הצלעות, ולכן חסומה ע"י .** |
| ממיר קלט: זוהי פונקציית הזהות, ולכן חסום ע"י . |
| לכן, סה"כ זמן הריצה לא כולל הקופסא השחורה הינו . |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**שאלה 3 (15 נקודות)**

|  |
| --- |
| ממיר הקלט: |
| לוקח גרף מכוון ושני קודקודים . |
| בונה גרף חדש בצורה הבאה: |
| כלומר, עבור כל ב נייצר קודקודי העתק ב ונסמנם ע"י אינדקס: . |
| *כל אינדקס יסמל העתק חדש לקודקוד בכל איטרציה.* |
| נחבר את קודקודי בצורה איטרטיבית באופן הבא: |
| לכל : כך ש מציין ונרוץ על פי הלולאה: |
| לכל , עבור כל אם אז נוסיף את הצלע ל. |
| ולבסוף לכל אם אז נוסיף את הצלע ל. |
| אבחנה: בגרף אין מעגלים. |
| ממיר הפלט: **מחזיר את הפלט שהוחזר מהאלגוריתם.** |
| **האלגוריתם: א) הרץ את ממיר הקלט בהינתן וקבל** . |
| **ב) נריץ את הקופסא השחורה עם קלט .** |
| **ג) החזר את התוצאה.** |
| **הוכחת נכונות:** |
| משפט: האלגוריתם מחזיר האם קיים מסלול באורך מ- ל-. |
| טענת עזר: קיים מסלול באורך (כאשר ) מ ל ב אם ורק אם קיימים אינדקסים |
| כך שהמסלול מ- ל- ב- הוא באורך ומתקיים . |
| הוכחת המשפט: |
| -אם יש פתרון, אז קיים מסלול מאורך מ ל בG-. |
| ולכן מטענת העזר קיימים אינדקסים כך שהמסלול מ ל ב הוא באורך ומתקיים . |
| נשים לב כי זה אפשרי רק כאשר . ולכן קיים מסלול מ ל ב באורך ולכן מהגדרת הקופסה |
| השחורה וממיר הקלט, נקבל כי קיים מסלול באורך בגרף ויוחזר כי קיים מסלול שכזה. |
| -אם אין פתרון, אז לא קיים מסלול מאורך מ- ל- ב-G. ולכן: |
| מטענת העזר לא קיימים אינדקסים כך שהמסלול מ ל ב הוא באורך ומתקיים . |
| מבניית הגרף, נבחין כי אם אין מסלול באורך בין ל אז לא קיים כלל מסלול באורך בגרף . |
| מהגדרת הקופסה השחורה וממיר הקלט, נקבל כי לא קיים מסלול באורך בגרף ויוחזר כי לא קיים מסלול שכזה. |
|  |
| הוכחת טענת עזר: |
| ***<=*** |
| נניח כי קיים מסלול באורך (כאשר ) מ ל ב. נסמנו . |
| *צ"ל:* קיימים אינדקסים כך שהמסלול מ- ל- ב- הוא באורך ומתקיים . |
| *נוכיח בעזרת אינדוקציה על גודל :* |
| מקרה בסיס : לכן נשים לב ש- , מהגדרת : נוסיף את הצלע , |
| ואכן, . |
| הנחת האינדוקציה: קיים מסלול באורך מ ל ב אם ורק אם קיימים אינדקסים כך |
| שהמסלול מ- ל- ב- הוא באורך ומתקיים . |
| צעד: נניח כי קיים מסלול באורך (כאשר ) מ ל ב. נסמנו . |
| נתבונן במסלול , מהנחת האינדוקציה, קיימים אינדקסים כך שהמסלול |
| מ- ל- ב- הוא באורך ומתקיים . |
| נשים לב ש- , מהגדרת :, וקיבלנו מסלול |
| מאורך . |
| => |
| נניח כי קיימים אינדקסים כך שהמסלול מ- ל- ב- הוא באורך ומתקיים . |
| *צ"ל: קיים* מסלול באורך (כאשר ) מ ל ב. |
| *נוכיח בעזרת אינדוקציה על גודל :* |
| מקרה בסיס : נתבונן במסלול , מכיוון ש- , נקבל כי , |
| לכן - , |
| הנחת האינדוקציה: קיימים אינדקסים כך שהמסלול מ- ל- ב- הוא באורך |
| ומתקיים אם ורק אם *קיים* מסלול באורך מ ל ב. |
| צעד: נניח כי קיימים אינדקסים כך שהמסלול מ- ל- ב- הוא באורך ומתקיים . |
| נסמנו . |
| נתבונן במסלול , מהנחת האינדוקציה, *קיים* מסלול באורך מ ל ב |
| נסמנו |
| נשים לב ש- מהגדרת בניית בהכרח מתקיים כי . לכן קיים מסלול |
| מ- ל-u מאורך . |
| כנדרש. |
|  |
| ניתוח זמן ריצה: |
| ממיר פלט: בניית הגרף מתבצעת על ידי איטרציה של צעדים. בכל איטרציה נעבור על כל קודקודי וצלעות הגרף לשם |
| שכפולם, ולכן ממיר הקלט חסום על ידי , מכיוון ש קבוע נקבל כי חסום ע"י: . |
| ממיר קלט: זוהי פונקציית הזהות, ולכן חסום ע"י . |
|  |
| לכן, סה"כ זמן הריצה לא כולל הקופסא השחורה הינו . |
|  |

**שאלה 4א (20 נקודות)**

|  |
| --- |
| נחלק את המתנות ל קבוצות ע"י לולאה עם אינדקס , המייצרת קבוצה באיטרציה ה על ידי |
| הנוסחא הבאה: |
| טענה מרכזית: עבור מתנות מסודרות על פי ערכן הכספי בסדר עולה, מתקיים שהפתרון |
| עבור- הוא אופטימלי כאשר |
| טענת עזר: יהיו , אז מתקיים: |
|  |
| הוכחה טענה מרכזית בהינתן טענת העזר ובעזרת אינדוקציה על מספר המתנות : |
| בסיס האינדוקציה, : נשים לב כי עבור מתנות, הפתרון כאשר |
| הוא הפתרון האופטימלי, מכיוון שישנה רק קבוצה אחת- . |
| הנחת האינדוקציה, עבור : הפתרון כאשר |
| הוא הפתרון האופטימלי עבור חלוקת הקבוצות. |
| צעד האינדוקציה: יהי מתנות המסודרות לפי ערכן הכספי בסדר עולה, |
| נבחר את המתנות , נשים לב: |
| ישנן 4 אפשרויות לשיבוצם לקבוצה: עבור 2 מתנות נוספות כלשהן : |
|  |
| מכיוון ש- |
| ומטענת העזר |
| נסיק שחלוקת המתנות ל: אופטימלית יותר מחלוקה . |
| לכן, מכיוון שזהו הפתרון האופטימלי נבחר את להיות: |
| כעת, נשאר לחלק מתנות. מהנחת האינדוקציה פתרון זה אופטימלי כאשר עבור |
| מתקיים כנדרש. |
|  |
| הוכחת טענת העזר: |
| יהי |
| נשים לב: |
| לכן: |
| ולכן גם: |
|  |
| ניתוח זמן ריצה: |
| - יצירת הקבוצות על ידי לולאה עם אינדקס: , ובחירת המינימום והמקסימום – חסום ע"י |
| לכן, זמן הריצה הכולל הוא . |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**שאלה 4ב (15 נקודות)**

|  |
| --- |
| נייצר אלגוריתם העובר על קודקודי הגרף. |
| נתייחס לצבעים כמספרים, עבור כל קודקוד שלא צבוע, נשייך עבורו מספר כך שמספר זה, יעמוד בשני תנאים: |
| א'- מספר זה לא משויך לאף אחד משכניו. |
| ב'- מספר זה יהיה המינימאלי המקיים תכונה זו. |
|  |
| טענה מרכזית: האלגוריתם מחזיר צביעה חוקית בעלת צבעים. |
| אבחנה: האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי, מפני שהוא לעולם לא ייצבע קודקוד בצבע הקיים לאחד משכינו. |
| טענה נשמרת: בכל שלב באלגוריתם קיים פתרון בעל שמכיל את פתרון האלגוריתם . |
| הוכחת הטענה הנשמרת (באינדוקציה): |
| סימונים: נסמן את צביעת קודקוד ב ואת צביעת כל הקודקודים עד הגעה לקודקוד זה ב . |
| בסיס האינדוקציה: מוכלת בכל פתרון בעל צבעים. |
| צעד: נניח כי עבור פתרון בעל צבעים כלשהו. |
| נוכיח כי עבור פתרון בעל צבעים כלשהו. |
| אם: ניקח . |
| אחרת: . |
| נסמן את הצביעה עבור בפתרון כך: . |
| נגדיר . נשים לב כי פתרון חוקי, בהתאם להגדרת האלגוריתם. |
| נשאר להוכיח כי פתרון המשתמש ב צבעים. |
| נשים לב, כי לא ייתן שהשכנים של קודקוד יהיו צבועים ביותר מ צבעים, זאת מכיוון שהדרגה המקסימלית בגרף |
| היא . |
| *מכיוון ש*   *,עד כה לא השתמשנו ביותר מ צבעים.* |
| *אם* השכנים של צבועים ב צבעים*, קיים צבע בין 1 ל פנוי. לכן האלגוריתם ייבחר אותו. נשים לב, כי בחירה* |
| *זו היא הבחירה היחידה עבור פתרון ב צבעים. לכן , בסתירה לכך* ש . |
| לכן, השכנים של צבועים לכל היותר ב צבעים. ולכן הוא צבע אפשרי מתוך . ולכן הוא פתרון |
| המשתמש ב צבעים. |
|  |
| ניתוח זמן ריצה: מעבר על קודקודי הגרף חסום ע"י |
| על פי האלגוריתם, נייצר רשימה של מספרים המייצגים צבעים, עבור כל קודקוד, אנו עוברים על כל רשימת שכינו, |
| מסמנים ברשימה האם המספר תפוס על ידי אחד משכינו, ומבצעים מעבר נוסף למציאת המספר הקטן ביותר הפנוי. |
| חסום ע"י . |
| ולכן זמן הריצה הינו: |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**שאלה 5 (15 נקודות)**

|  |
| --- |
| נייצר אלגוריתם המשתמש ב רשימה מקושרת של זוגות מספרים ממשיים היבטאו תא באורך 1. בעזרת לולאה |
| העוברת על מערך . נעבור על מספר ממשי במערך, ועבור כל נבדוק האם התא האחרון ברשימה מכיל בטווח |
| את . אם הוא מכיל בטווח את , לא נעשה דבר. |
| אם הוא לא מכיל בטווח את , נוסיף את האיבר לסוף הרשימה . |
| לאחר סיום מעבר על אברי המערך, נחזיר את הרשימה המקושרת כמופע הפתרון. |
|  |
| משפט: האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי, ב מינימאלי |
| אבחנה: האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי מכיוון שלכל , ולכל קיים |
| *כך ש- .* |
| טענה נשמרת: בכל שלב באלגוריתם קיים פתרון אופטימלי שמכיל את . |
| הוכחת הטענה הנשמרת (באינדוקציה): |
| סימונים: נסמן את התא ה- באורך 1 שהאלגוריתם מכניס ל- ב: . נסמן את האיברים הראשונים |
| שהאלגוריתם בחר כ- |
| בסיס האינדוקציה: מוכלת בכל פתרון אופטימלי. |
| צעד: נניח כי עבור פתרון אופטימלי כלשהו. |
| נוכיח כי עבור פתרון אופטימלי כלשהו. |
| אם: . ניקח . |
| אחרת: . |
| נסמן ב- את התאים ב- שלא מוכלים ב. |
| נגדיר ונשים לב כי |
| מספיק להוכיח כי פתרון חוקי. |
| נשים לב, לפתרון הלא חוקי קיימים מספרים ממשיים שלא שייכים לתא. |
| מכיוון ש- ותא הוא באורך מקסימלי של 1, אז . |
| מהגדרת האלגוריתם, מכיוון ש הוא המספר הממשי הקטן ביותר שלא שייך לתא, התא יוגדר להיות |
| שווה ל- . מכיוון ש נשים לב כי ולכן כיסינו את כל |
| המספרים הממשיים שלא היו שייכים לתא, ו- . |
| משפט: בסוף ריצת האלגוריתם, הקבוצה היא פתרון אופטימלי. |
| הוכחה: מהטענה הנשמרת קיים אופטימלי כך ש- . קיימים מספר סופי של מספרים ממשיים החסום על ידי |
| הוא פתרון חוקי, ולכן מתקבל פתרון המכסה את כל המספרים. |
| נניח בשלילה כי , קיים תא ו- . אך מכיוון ש- חוקי הוא מכסה את כל המספרים, |
| לא קיים מספר ממשי השייך ל בלבד, ולכן הוא פתרון חוקי בסתירה לאופטימליות . |
| לכן . |
|  |
|  |
| ניתוח זמן ריצה: |
| זמן האיטרציה על איברי מערך המספרים הממשיים הוא כמספר האיברים, לכן חסום ע"י . |
| ולכן סה"כ זמן הריצה של האלגוריתם הוא . |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**בהצלחה!**